Lokalni ekstremi funkcija dvije varijable

Matematika 2

Erna Begović Kovač, 2019.

Literatura: I. Gusić, Lekcije iz Matematike 2

http://matematika.fkit.hr

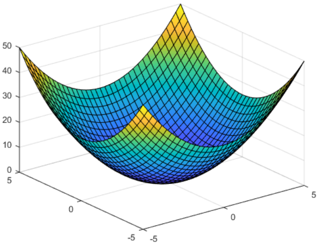
Uvod

- Lokalni i globalni ekstremi
- Rješavamo problem minimizacije i maksimizacije funkcije.
- Tražimo točku u kojoj funkcija poprima najmanju/najveću vrijednost.
- Ovaj se problem rješava korištenjem parcijalnih derivacija.

Geometrijska predodžba

- Funkcija f ima **lokalni minimum** u točki (x_0, y_0) ako je $f(x_0, y_0)$ najmanja vrijednost od f u nekoj okolini od (x_0, y_0).

- Funkcija f ima **lokalni maksimum** u točki (x_0, y_0) ako je $f(x_0, y_0)$ najveća vrijednost od f u nekoj okolini od (x_0, y_0).



Tangenta

Tangencijalna ravnina na graf funkcije f u točki ekstrema paralelna je s xy-ravninom.

Analogno, tangenta na graf funkcije jedne varijable u točki ekxtrema paralelna je s x-osi.

Stoga, jednadžba tangencijalne ravnine u točki ekstrema ima oblik

$$z = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Onda iz jednadžbe tangencijalne ravnine

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

dobijemo da mora biti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

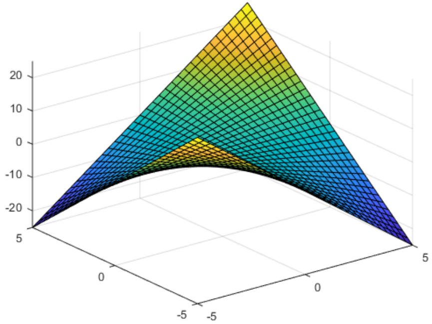
To je nužni uvjet za lokalni ekstrem.

Kritične točke

Točke koje zadovoljavaju nužni uvjet za lokalni ekstrem nazivaju se **kritične točke**.

Kritična točka može biti lokalni minimum, lokalni maksimum ili **sedlasta točka**.

Sedlasta točka je analogna točki infleksije kod funkcije jedne varijable.



Primjer 1

Odredite kritične točke funkcija

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$,

b) $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5$.

Kriterij lokalnog ekstrema

Da odredimo karakter kritične točke koristimo derivacije drugog reda.

Označimo

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \\ B &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \\ C &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Definiramo

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Kriterij lokalnog ekstrema

Ako je

(i) $\Delta > 0$, onda je (x_0, y_0) točka lokalnog ekstrema, i to
- **maksimum** ako je $A < 0$,
- **minimum** ako je $A > 0$.

(ii) $\Delta < 0$, onda je (x_0, y_0) **sedlasta točka**.

(iii) $\Delta = 0$, onda kriterij ne daje odluku.

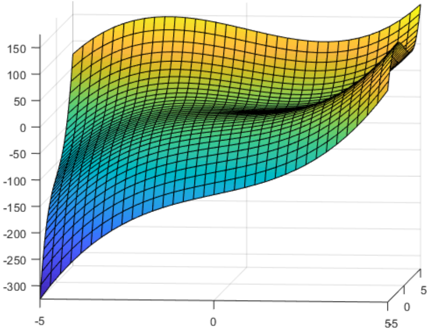
Primjer 2

Odredite lokalne ekstreme funkcija

a) $f(x, y) = xy$,

b) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$,

c) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$.



Primjer 2.c

Primjer 3

Od svih kvadara obujma V nađite onaj koji ima najmanje oplošje.

Obujam je $V = abc$, a oplošje $O = 2ab + 2bc + 2ac$.

Želimo minimizirati izraz $2ab + 2bc + 2ac = 2(ab + bc + ac)$.
Dovoljno je minimizirati

$$ab + bc + ac.$$

Iz uvjeta $abc = V$ dobijemo $c = \frac{V}{ab}$ pa je

$$ab + bc + ac = ab + \frac{V}{a} + \frac{V}{b}.$$

Problem se svodi na traženje minimuma funkcije

$$f(a, b) = ab + \frac{V}{a} + \frac{V}{b}.$$

Dobijemo $a = b = c = \sqrt[3]{V}$ iz čega zaključujemo da od svih kvadara s danim obujmom, najmanje oplošje ima kocka.

Zadatak

1. Odredite kritične točke funkcija
   (i) $f(x,y) = (x^3 - 4xy)e^{-2y}$,
   (ii) $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$.

2. Odredite lokalne ekstreme funkcija
   (i) $f(x,y) = xy - 4x^2y - 4xy^2$,
   (ii) $f(x,y) = x^3 + x^2 + x^2y - y^2 - 6y - 5$.